JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 23, 113–136 (1978)

Ungleichungen vom Jackson-Typ für die algebraische beste Approximation in L_p

P. OSWALD

Mech.-Math. Fakultät, Staatliche Universität Odessa, Odessa, UdSSR

Communicated by P. L. Butzer

Received November 10, 1976

In der vorliegenden Arbeit sollen einige Verallgemeinerungen des bekannten Theorems von Jackson für die Abschätzung der algebraischen besten Approximation diskutiert werden. Hauptanliegen wird der Beweis von Ungleichungen mit Stetigkeitsmoduln beliebiger Ordnung in L_p, $1 \leqslant p < \infty$, sein; außerdem beschäftigen wir uns mit Aspekten der konstruktiven Beschreibung der Klassen H_p^ω und ihrer Analoga.

1

In diesem Paragraphen werden die notwendigen Begriffe und Bezeichnungen erläutert und einige Hilfssätze bewiesen, die wir im weiteren benutzen werden.

Mit $L_p \equiv L_p(\Delta)$, $1 \leqslant p < \infty$ bezeichnen wir wie gewöhnlich den Banachraum der auf dem endlichen Segment $\Delta \equiv [a, b]$, $|\Delta| = b - a < \infty$, meßbaren Funktionen $f(x)$ mit der Norm

$$\|f\|_p \equiv \|f(x)\|_{L_p(\Delta)} = \left\{\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right\}^{1/p} < \infty.$$

Analog definiert man L_∞ ($\|f\|_\infty = \operatorname{supvrai}_{x\in\Delta} |f(x)|$) und $C \equiv C(\Delta)$—den Raum der auf Δ stetigen Funktionen mit der Norm

$$\|f\| \equiv \|f(x)\|_{C(\Delta)} = \max_{x\in\Delta} |f(x)|.$$

Stetigkeitsmodul m-ter Ordnung, $m = 1, 2,\ldots$, der Funktion $f \in L_p$ nennen wir

$$\omega_{p,m}(\delta, f) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \mathscr{I}_{p,m}(h, f), \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant |\Delta|/m,$$

wobei

$$\mathscr{I}_{p,m}(h, f) = \|\Delta_h^m f(x)\|_{L_p(a,b-mh)}$$

0021-9045/78/0232–0113\$02.00/0

sowie

$$\Delta_h{}^m f(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} f(x + \nu h)$$

die Differenz m-ter Ordnung mit Schrittweite h von $f(x)$ bezichnet. Analog führen wir $\omega_{\infty,m}(\delta, f)$ bzw. $\omega_m(\delta, f)$ für $f \in L_\infty$ bzw. $f \in C$ ein. Einfache Eigenschaften der Stetigkeitsmoduln, die besonders für $m = 1$, 2 eine wichtige Rolle in der konstruktiven Funktionentheorie spielen, kann man z.B. in der Monographie [18] finden. Wir halten hier lediglich die Beziehung

$$\omega_{p,m}(2h, f) \leqslant 2^m \omega_{p,m}(h, f) \tag{1.1}$$

und eine Ungleichung vom Marchoud'schen Typ (siehe z.B. [7])

$$\omega_{p,m}(h, f) \leqslant C(m)\, h^m \int_h^{|\Delta|/(m+1)} \frac{\omega_{p,m+1}(t, f)}{t^{m+1}}\, dt + O(h^m) \tag{1.2}$$

fest. In (1.2) und überall im weiteren Text werden wit unter $C(m)$, $C(m, l)$,... positive, nur von den angegebenen Parametern abhängige Konstanten verstehen, die in der Regel in verschiedenen Abschätzungen und Gleichungen verschieden sind. Wir werden die Funktion $\omega(h)$, $0 \leqslant h \leqslant H$, Stetigkeitsmodul nennen und $\omega(h) \in \Omega$ schreiben, wenn für $0 \leqslant h \leqslant h + h_1 \leqslant H$ gilt

$$0 \leqslant \omega(0) = \omega(+0) \leqslant \omega(h) \leqslant \omega(h + h_1) \leqslant \omega(h) + \omega(h_1).$$

Es ist wohlbekannt, daß Ω mit der Klasse der Stetigkeitsmoduln erster Ordnung von Funktionen aus C zusammenfällt. Weiterhin werden wir $w(h) \in W_m$, $m = 1, 2, \ldots$, schreiben, wenn diese Funktion für $0 \leqslant h \leqslant h_1 \leqslant H$ folgende Bedingungen erfüllt

$$0 \leqslant w(h) \leqslant w(h_1), \qquad w(h) \leqslant 2^m w(h/2).$$

In diesen Definitionen kann die Zahl $H > 0$ von Funktion zu Funktion verschieden sein. Da im weiteren nur das Verhalten in der Nullumgebung von Interesse ist, kann man bei Notwendigkeit $\omega(h) = \omega(H)$ bzw. $w(h) = w(H)$ für $h > H$ setzen. Wir bemerken, daß dank der angegebenen Bedingungen die Stetigkeitsmoduln m-ter Ordnung zu W_m gehören (siehe (1.1)). Außerdem gilt $\Omega \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots$. Sei $w(h) \in W_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant p < \infty$. Wir sagen $f \in H^w_{p,m}$, wenn

$$\omega_{p,m}(h, f) = O(w(h)), \qquad h \to 0.$$

Für $m = 1$, $\omega(h) \in \Omega$, erhalten wir die gewöhnlichen Klassen $H_p{}^\omega$.

Wir benötigen folgende Behauptungen.

LEMMA 1. *Sei $w(h) \in W_m$. Dann gilt*

$$h^{m+1} \int_h^H \frac{w(t)}{t^{m+2}} \log_2 \frac{2t}{h}\, dt = O(w(h)), \qquad h \to 0. \tag{1.3}$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $H = 1$. Sei $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Aus den Eigenschaften von $w(h) \in W_m$ folgt

$$\begin{aligned}
2^{-k(m+1)} \int_{2^{-k}}^1 \frac{w(t)}{t^{m+2}} \log_2 2^{k+1} t\, dt &\leqslant 2^{-k(m+1)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{w(2^{-i})(k+1-i)}{2^{-(i+1)(m+2)}} \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \frac{2^{(k-i)m} \cdot 2^{(i+1)(m+1)}(k+1-i)}{2^{k(m+1)}}\, w(2^{-k}) \\
&\leqslant 2^{m+1} w(2^{-k}) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k+1-i}{2^{k-i}} \\
&= O(w(2^{-k})), \qquad k \to \infty.
\end{aligned}$$

Hieraus leitet man leicht (1.3) ab.

LEMMA 2. *Sei $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$. Dann gilt*

$$\mathscr{I}_{p,m}^p(h, f) \leqslant \frac{C^p(m)}{h} \int_0^h \mathscr{I}_{p,m}^p(\xi, f)\, d\xi, \qquad 0 < h \leqslant \frac{b-a}{m}. \tag{1.4}$$

Beweis. Für $0 < h_1 \leqslant h \leqslant |\Delta|/m$ haben wir die Identität

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \Delta_{h-(2j/m)h_1}^m f(x + jh_1) \\
&\quad = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} f\left(x + jh_1 + \nu\left(h - \frac{2j}{m} h_1\right)\right) \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \binom{m}{\nu} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f\left(x + \nu h + j \frac{m-2\nu}{m} h_1\right) \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \binom{m}{\nu} \Delta_{((m-2\nu)/m)h_1}^m f(x + \nu h).
\end{aligned}$$

Wir bemerken, daß die erste Summe für $j = 0$ die m-te Differenz $\Delta_h{}^m f(x)$ enthält, und stellen die Identität nach ihr um. Danach werden beide Seiten in die p-te Potenz erhoben. Jetzt wird die für beliebige reelle a_i und natürliche

n-gültige Ungleichung $|\sum_{i=1}^n a_i|^p \leqslant n^{p-1}\sum_{i=1}^n |a_i|^p$ entsprechend benutzt und nach x in den Grenzen von a bis $b - mh$ integriert. Das ergibt die Ungleichung

$$\mathscr{I}_{p,m}^p(h, f) \leqslant C^p(m) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} \mathscr{I}_{p,m}^p \left(\left| \frac{m-2\nu}{m} \right| h_1, f \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \mathscr{I}_{p,m}^p \left(\left| h - \frac{2j}{m} h_1 \right|, f \right) \right\}.$$

Wir integrieren hier nach h_1 von 0 bis h und erhalten

$$h\mathscr{I}_{p,m}^p(h, f) \leqslant C^p(m) \left\{ \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq m/2}}^{m} \frac{m}{m-2\nu} \int_0^{|(m-2\nu)/m|h} \mathscr{I}_{p,m}^p(\xi, f)\, d\xi \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \frac{m}{2j} \int_{((m-2j)/m)h}^{h} \mathscr{I}_{p,m}^p(\xi, f)\, d\xi \right\}$$
$$\leqslant C^p(m) \int_0^h \mathscr{I}_{p,m}^p(\xi, f)\, d\xi.$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Folgender Hilfssatz wurde von Brudnyĭ in [2] angegeben und spielt in unseren weiteren Betrachtungen eine wichtige Rolle.

LEMMA 3. *Für $z \in [-1, 1]$ setzen wir*

$$\Theta_z(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant z, \\ 1, & x < z, \end{cases} \qquad x \in [-1, 1]. \tag{1.5}$$

Dann existieren algebraische Polynome $Q_z(x) \equiv Q_{2nl}(x; z)$ der Ordnung $\leqslant 2nl$ mit der Beziehung

$$|\Theta_z(x) - Q_z(x)| \leqslant \frac{C(l)}{(n\,|\arccos x - \arccos z| + 1)^{2l-1}}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{1.6}$$

wobei $n = 0, 1,\ldots,\ l = 1, 2,\ldots$ gilt.

Mit $P_m \equiv P_m(x)$ bezeichnen wir algebraische Polynome der Ordnung $\leqslant m$, $m = 0, 1,\ldots$.

LEMMA 4. *Für $x \in (-\infty, \infty)$ gilt die Abschätzung*

$$|P_m(x)| \leqslant C(m) \frac{\delta(x)}{|\Delta|^{1/p}} \| P_m(x) \|_{L_p(\Delta)}, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \tag{1.7}$$

wobei

$$\begin{aligned}\delta(x) \equiv \delta_m(x; \Delta) &= 1, & x \in \Delta \\ &= \left| x - \frac{a+b}{2} \right|^m \Big/ |\Delta|^m, & x \in (-\infty, \infty)\backslash\Delta.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Beweis. Wenn $x \in \Delta$, so gilt einfach $|P_m(x)| \leqslant \| P_m \|_{C(\Delta)}$. Für $x \in (-\infty, \infty)\backslash\Delta$ benutzen wir eine Ungleichung von Čebyšev (siehe [18, S. 79])

$$| P_m(x)| \leqslant \operatorname{ch} \left[m \operatorname{arcch} \frac{2x - a - b}{b - a} \right] \cdot \| P_m \|_{C(\Delta)},$$

wobei

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(m \operatorname{arcch} t) &= \tfrac{1}{2}[(t + (t^2 - 1)^{1/2})^m + (t - (t^2 - 1)^{1/2})^m] \\ &\leqslant 2^m |t|^m, \qquad |t| \geqslant 1\end{aligned}$$

gilt. Wenn man also $\delta(x)$ gemäß (1.8) festlegt, so ist offenbar

$$| P_m(x)| \leqslant C(m)\, \delta(x) \| P_m \|_{C(\Delta)}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Der Beweis schließt mit der Anwendung einer Ungleichung aus [18, S. 251]

$$\| P_m \|_{C(\Delta)} \leqslant \left\{ \frac{2(p+1)}{|\Delta|} \right\}^{1/p} m^{2/p} \| P_m \|_{L_p(\Delta)}.$$

Sei nun $E_{m,p}(f) = \inf_{P_m} \|f(x) - P_m(x)\|_{L_p(\Delta)}$, $m = 0, 1, \ldots$, die beste Approximation der Funktion $f \in L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mit Hilfe algebraischer Polynome der Ordnung $\leqslant m$ auf dem Segment Δ. Analog definiert man $E_m(f)$ für $f \in C$. Für Funktionen aus dem Raum L_∞ (und damit auch aus C) hat Whitney in [19] folgende Ungleichung angegeben:

$$E_{m,\infty}(f) \leqslant C(m)\, \omega_{\infty,m+1}(|\Delta|/(m+1), f), \qquad f \in L_\infty.$$

Eine Verallgemeinerung dieses Resultates auf die Räume L_p, $1 \leqslant p < \infty$, bewies Brudnyĭ [3]; sie ist auch als Spezialfall in Ergebnissen aus der Approximationstheorie mit Splinefunktionen enthalten (siehe [5, 13]). Vor kurzem hat Storoženko [14] (vergl. auch die Arbeit [15], in der der Fall $0 < p < 1$ betrachtet wurde) folgende Verbesserung dieses Ergebnisses erreicht: Sei $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 0, 1, \ldots$. Dann gilt

$$\begin{aligned}E_{m,p}(f) \leqslant C(m) \Bigg[&\left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_0^{|\Delta|/(2m+1)} \mathscr{I}^p_{p,m+1}(\xi, f)\, d\xi \right\}^{1/p} \\ &+ \mathscr{I}_{p,m+1}\left(\frac{|\Delta|}{2m+1}, f \right) \Bigg].\end{aligned} \tag{1.9}$$

Wir benötigen diese Abschätzung in etwas anderer Gestalt.

LEMMA 5. *Sei* $f(x) \in L_p(\Delta)$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 0, 1,\ldots$. *Dann existiert ein Polynom* $P(x) \equiv P_m(x; \Delta, f)$ *von der Ordnung* $\leqslant m$, *für das die Ungleichung*

$$E_{m,p}(f) \leqslant \|f - P\|_p \leqslant C(m) \left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_0^{|\Delta|/(m+1)} \mathscr{I}^p_{p,m+1}(\xi, f)\, d\xi \right\}^{1/p} \tag{1.10}$$

erfüllt ist.

Zum Beweis von (1.10) genügt es, Lemma 2 und (1.9) zu kombinieren. Als letztes betrachten wir eine beliebige Zerlegung des Segments Δ

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b$$

und definieren für eine gegebene Funktion $f \in L_p$ die stückweise-polynomiale Funktion der Ordnung $\leqslant m$

$$S(x) \equiv S_m(x; \pi, f) = P_m(x; \Delta_j, f), \qquad x \in \Delta_j \equiv [x_{j-1}, x_j), \quad j = 1,\ldots, r. \tag{1.11}$$

Sei noch $\bar{\Delta} = \max_j |\Delta_j|$, $\underline{\Delta} = \min_j |\Delta_j|$.

LEMMA 6. *Sei* $f(x) \in L_p(\Delta)$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 0, 1,\ldots$. *Dann gilt für die in* (1.11) *definierte Funktion* $S(x)$

$$\begin{aligned} \|f - S\|_p &\leqslant C(m) \left\{ \frac{1}{\underline{\Delta}} \int_0^{\bar{\Delta}/(m+1)} \mathscr{I}^p_{p,m+1}(\xi, f)\, d\xi \right\}^{1/p} \\ &\leqslant C(m) \left(\frac{\bar{\Delta}}{\underline{\Delta}} \right)^{1/p} \omega_{p,m+1}\left(\frac{\bar{\Delta}}{m+1}, f \right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Der Beweis von Lemma 6 reduziert sich auf ein Addieren der Abschätzungen (1.10) und einige elementare Umformungen; wir führen ihn deshalb hier nicht durch. Wir bemerken noch, daß die letzte Ungleichung aus (1.12) in einem allgemeineren Fall bereits in [13] angegeben wurde.

2

Eines der klassischen Ergebnisse der Approximationstheorie ist die Ungleichung von D. Jackson

$$E_n(f) \leqslant C\omega_1\left(\frac{b-a}{n+1}, f \right), \qquad n = 0, 1,\ldots, f \in C. \tag{2.1}$$

Ein ähnliches Resultat für den Fall der Räume L_p, $1 \leqslant p < \infty$, wurde von Potapov in [11] bewiesen. Es bleibt zu fragen, ob eine Abschätzung vom Typ (2.1) auch mit Stetigkeitsmoduln beliebiger Ordnung in der rechten Seite bestehen bleibt, wie es für die trigonometrische beste Approximation der Fall ist. Die Richtigkeit einer derartigen Behauptung für den Raum C der stetigen Funktionen folgt aus einem Ergebnis von Brudnyĭ [2], [4], das wir in Teil 3 (Theorem C) anführen.

Wir geben hier eine Antwort auf die gestellte Frage für die Räume L_p, $1 \leqslant p < \infty$.

THEOREM 1. *Sei $f(x) \in L_p(\Delta)$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$. Für beliebige $n \geqslant m - 1$ gilt*

$$E_{n,p}(f) \leqslant C(m)\, \omega_{p,m}\left(\frac{|\Delta|}{n+1}, f\right). \tag{2.2}$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $\Delta = [-1, 1]$ voraus. Wir fixieren m und p, $m = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant p < \infty$. Für $n = 0, 1, \ldots$ betrachten wir die Zerlegungen

$$\pi^{(n)}: \quad \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n+1},$$
$$\alpha_i \equiv \alpha_i^{(n)} = -1 + \frac{2i}{n+1}, \qquad i = 0, \ldots, n+1$$

des Segments $[-1, 1]$ in $n + 1$ gleiche Teile. Es ist gut bekannt (vergl. [5, 13]), daß für ein gegebenes $f \in L_p$ eine Splinefunktion $S(x) \equiv S_{m,n}(x; f)$ mit den Eigenschaften

$$S(x) = P_i(x), \qquad x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i), \qquad i = 1, \ldots, n+1, \tag{2.3}$$
$$S^{(m-2)}(x) \in C(-1, 1), \qquad m \geqslant 2 \tag{2.4}$$

existiert (hier sind $P_i(x) \equiv P_{m-1,i}(x)$ gewisse Polynome von der Ordnung $\leqslant m - 1$), für die die Ungleichung

$$\| f - S_{m,n} \|_p \leqslant C(m)\, \omega_{p,m}\left(\frac{2}{m(n+1)}, f\right) \tag{2.5}$$

erfüllt ist, $n = 0, 1, \ldots$. Wir bemerken, daß dank (2.3), (2.4)

$$P_i(x) - P_{i+1}(x) = \beta_i (x - \alpha_i)^{m-1}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

mit gewissen reellen β_i gilt und daß aufgrund von (2.5) leicht

$$\omega_{p,m}\left(\frac{2}{m(n+1)}, S_{m,n}\right) \leqslant C(m)\, \omega_{p,m}\left(\frac{2}{m(n+1)}, f\right) \tag{2.7}$$

folgt. Unter Benutzung der Funktionen (1.5) können wir jetzt schreiben

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} P_i(x)(\Theta_{\alpha_i}(x) - \Theta_{\alpha_{i-1}}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Theta_{\alpha_i}(x)(P_i(x) - P_{i+1}(x)) + P_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Aus Lemma 3 mit $l = [(m-1)/2] + 2$ folgt nun, daß Polynome $Q_i(x) \equiv Q_{2nl}(x, \alpha_i^{(n)})$ von der Ordnung $\leqslant (m+3)\, n$ derart existieren, daß

$$| \Theta_{\alpha_i}(x) - Q_i(x)| \leqslant \frac{C(m)}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}}, \qquad i = 1,\ldots, n \tag{2.8}$$

gilt. Demnach haben die Polynome

$$P(x) \equiv P_{m,n}(x) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x)(P_i(x) - P_{i+1}(x)) + P_{n+1}(x) \tag{2.9}$$

die Ordnung $\leqslant m - 1 + (m+3)\, n$, $n = 0, 1,\ldots$. Also bekommen wir aus (2.6), (2.8) und der Jensen'schen Ungleichung für $n = 1, 2,\ldots,$

$$\begin{aligned} | S(x) - P(x)|^p &= \left| \sum_{i=1}^{n} (Q_i(x) - \Theta_{\alpha_i}(x))(P_i(x) - P_{i+1}(x)) \right|^p \\ &\leqslant C(m)^p \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|\,\beta_i\,| \cdot |\,x-\alpha_i\,|^{m-1}}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}} \right)^p \\ &\leqslant C(m)^p \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|\,x-\alpha_i\,|^{m-1}}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}} \right)^{p-1} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{n} \frac{|\,x-\alpha_i\,|^{m-1}\,|\,\beta_i\,|^p}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Da wir aber für jedes $x \in [-1, 1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\,x-\alpha_i\,|^{m-1}}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}} &\leqslant 2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(2i/n + 1)^{m-1}}{(n(2(i-1)/n + 1) + 1)^{m+1}} \\ &\leqslant \frac{C(m)}{(n+1)^{m-1}} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} \leqslant C(m)(n+1)^{-(m-1)} \end{aligned}$$

haben, folgt aus (2.10)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |\,S(x) - P(x)|^p\, dx &\leqslant C(m)^p\, (n+1)^{-(p-1)(m-1)} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{n} |\,\beta_i\,|^p \int_{-1}^{1} \frac{|\,x-\alpha_i\,|^{m-1}\, dx}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Eine unmittelbare Rechnung zeigt, daß

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \frac{|\,x-\alpha_i\,|^{m-1}\, dx}{(n\,|\,x-\alpha_i\,| + 1)^{m+1}} \\ &\qquad \leqslant 2 \int_{0}^{2} \frac{x^{m-1}\, dx}{(nx+1)^{m+1}} \leqslant \frac{2}{(n+1)^m} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} \leqslant \frac{C}{(n+1)^m} \end{aligned}$$

gilt. Aus den letzten beiden Ungleichungen erhalten wir

$$\| S - P \|_p^p \leqslant C(m)^p (n+1)^{-1-(m-1)p} \sum_{i=1}^{n} | \beta_i |^p. \tag{2.11}$$

Wir schätzen ab

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_i+2/m(n+1)} | P_i(x) - P_{i+1}(x)|^p \, dx = \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+2/m(n+1)} | \beta_i |^p \, | x - \alpha_i |^{(m-1)p} \, dx$$

$$= | \beta_i |^p \int_0^{2/m(n+1)} x^{(m-1)p} \, dx$$

$$\geqslant C(m)^p \, | \beta_i |^p \, (n+1)^{-1-(m-1)p}. \tag{2.12}$$

Da aber dank (2.3) die Gleichheit

$$-\Delta_{2/m(n+1)}^m S(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{m-\nu+1} \binom{m}{\nu} P_i \left(x + \nu \frac{2}{m(n+1)}\right) - P_{i+1} \left(x + \frac{2}{n+1}\right)$$

$$= -\Delta_{2/m(n+1)}^m P_i(x) + P_i \left(x + \frac{2}{n+1}\right) - P_{i+1} \left(x + \frac{2}{n+1}\right)$$

$$= P_i \left(x + \frac{2}{n+1}\right) - P_{i+1} \left(x + \frac{2}{n+1}\right),$$

$$x \in \left(\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1} + \frac{2}{m(n+1)}\right)$$

besteht, schließen wir mit (2.11), (2.12), daß für $n = 1, 2, \ldots$

$$\| S - P \|_p^p \leqslant C(m)^p \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+2/m(n+1)} | \Delta_{2/m(n+1)}^m S(x)|^p \, dx$$

$$\leqslant C(m)^p \, \omega_{p,m}^p \left(\frac{2}{m(n+1)}, S\right)$$

gilt. Für $n = 0$ ist einfach $S(x) = P(x)$. Unter Berücksichtigung der letzten Ungleichung, von (2.5) und (2.7) erhalten wir, daß die konstruierten Polynome (2.9) der Abschätzung

$$\| f - P_{m,n} \|_p \leqslant \| f - S \|_p + \| S - P \|_p$$

$$\leqslant C(m) \, \omega_{p,m} \left(\frac{2}{m(n+1)}, f\right) \tag{2.13}$$

genügen. Wir setzen nun $P_n(x) = P_{m,k}(x)$ für $m - 1 + (m + 3)\,k \leqslant n < m - 1 + (m + 3)(k + 1)$, $k = 0, 1, \ldots$. Auf Grund von (2.9), (2.13) und den Eigenschaften des Stetigkeitsmoduls m-ter Ordnung (z.B. (1.1)) überzeugt man sich leicht, daß diese Polynome $P_n(x)$, $n \geqslant m - 1$, die gesuchten sind. Damit ist Theorem 1 bewiesen.

Aus Theorem 1 und der Ungleichung

$$\omega_{p,m+r}(h, f) \leqslant h^r \omega_{p,m}(h, f^{(r)}), \qquad f(x) \in W_p{}^r(\Delta), \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

wobei $W_p{}^r \equiv W_p{}^r(\Delta)$ die Klasse differenzierbarer Funktionen $f(x)$ bezeichnet, für die $f^{(r-1)}(x)$ absolut stetig auf Δ ist und $f^{(r)}(x) \in L_p(\Delta)$ gilt, folgt sofort eine Behauptung, die gewöhnlich zweites Theorem von Jackson genannt wird: Wenn $f \in W_p{}^r$, $1 \leqslant p < \infty$, $r = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$ gilt, so besteht für $n \geqslant m + r - 1$ die Abschätzung

$$E_{n,p}(f) \leqslant C(m + r) \left(\frac{|\Delta|}{n + 1}\right)^r \omega_{p,m}\left(\frac{|\Delta|}{n + 1}, f^{(r)}\right). \tag{2.14}$$

Aus unseren Ergebnissen folgt weiterhin, daß für Funktionen $f \in H^w_{p,m}$ ($w(h) \in W_m$) und $n \geqslant m - 1$ die Beziehung

$$E_{n,p}(f) = O(w(1/n)), \qquad n \to \infty, \tag{2.15}$$

gilt. Es ist gut bekannt, daß umgekehrt (2.15) nicht unbedingt $f \in H^w_{p,m}$ impliziert. Unter Benutzung der gewöhnlichen Technik zum Beweis von Umkehrsätzen und der Ungleichung von Lebed' [8] für die L_p-Norm der Ableitung eines algebraischen Polynoms kann man allerdings Umkehrsätze für jedes völlig im Inneren von Δ liegende Segment gewinnen.

Daraus läßt sich nun folgende Variante zur Charakterisierung der Klassen $H^w_{p,m}$ ableiten: Gegeben seien eine Funktion $f(x) \in L_p(\Delta)$, $1 \leqslant p < \infty$, eine (fixierte) natürliche Zahl m, $m = 1, 2, \ldots$, und ein beliebiges (fixiertes) Segment $\Delta' = [a', b']$ mit $\Delta \subset (a', b')$. Besov hat in [1] gezeigt, daß eine Fortsetzung $\tilde{f}(x)$, $x \in \Delta'$, der Funktion $f(x)$ existiert (d.h. $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in \Delta$), für die

$$\omega_{p,m}(h, \tilde{f}) = O(\omega_{p,m}(h, f)), \qquad h \to 0,$$

gilt. Wenn $w(h) \in W_m$ der Beziehung

$$h^m \int_h^H \frac{w(t)}{t^{m+1}}\, dt = O(w(h)), \qquad h \to 0, \tag{2.16}$$

genügt, so sind folgende Aussagen äquivalent

(1) $f \in H^w_{p,m}$

(2) $E_{n,p}(\tilde{f}) = O\left(w\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad n \to \infty.$

3

Wie weiter oben schon deutlich wurde, ist die Frage nach der Umkehrbarkeit der direkten Theoreme für die algebraische beste Approximation und der konstruktiven Charakterisierung von Funktionenklassen, die durch Struktureigenschaften beschrieben werden, nicht vollständig geklärt. Diese Aussage bezieht sich vorrangig auf den Fall der Räume L_p, $1 \leqslant p < \infty$. Für die Metrik des Raumes C hat als erster Nikolskiĭ in [10] bemerkt, daß man eine Funktion $f(x) \in \text{Lip } 1 \equiv H^\delta$ an den Enden des Segments besser annähern kann als in der Mitte. In Fortsetzung dieser Idee bewies A. F. Timan folgende Behauptung.

THEOREM A ([16]). *Für $f(x) \in C$ und $n = 1, 2, \ldots$ existieren algebraische Polynome $P_n(x)$ der Ordnung $\leqslant n$, für die gilt*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C\omega_1\left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{n} + \frac{1}{n^2}, f\right). \tag{3.1}$$

Hier und weiter unten nehmen wir O.B.d.A. $\varDelta = [-1, 1]$ an.

Etwas später wurde von Dzjadyk [6] und A.F. Timan [17] die Umkehrung dieses Satzes gezeigt.

THEOREM B. *Wenn $f(x) \in C$ gilt und für ein gewisses $\omega(h) \in \Omega$ (3.1) erfüllt ist, so hat man die Abschätzung*

$$\omega_1(h, f) = O\left(h \int_h^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt\right), \qquad h \to 0.$$

Theorem A und B zusammen implizieren eine konstruktive Beschreibung der Klassen H^ω, wenn $\omega(h)$ für $m = 1$ der Beziehung (2.16) genügt. Wir bemerken noch, daß Brudnyĭ in [4] (3.1) für Stetigkeitsmoduln höherer Ordnung bewiesen hat.

THEOREM C. *Für jede Funktion $f(x) \in C$ und $m = 1, 2, \ldots$ existiert eine Folge von Polynomen $\{P_n(x)\}_{n=m-1}^{\infty}$, so daß gilt*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(m)\omega_m\left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{n} + \frac{1}{n^2}, f\right), \qquad n \geqslant m-1. \tag{3.2}$$

Die strukturelle Beschreibung von Funktionenklassen, die durch die zu (3.1) analogen Aussagen in den Räumen L_p, $1 \leqslant p < \infty$, bestimmt sind, d.h. der Klassen von Funktionen $f(x) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, für die bei gewissem $\omega(h) \in \Omega$ Polynome $P_n(x)$, $n \geqslant 1$ existieren, so daß

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega\left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right\|_{L_p(-1,1)} = O(1), \qquad n \to \infty \tag{3.3}$$

gilt, führte Potapov und Lebed' zur Definition neuer Klassen A_p^ω (siehe z.B. [12, 9]). Längere Zeit war nicht klar, ob (3.3) auch die Klassen H_p^ω beschreibt. V. P. Motornyĭ hat nun in [9] festgestellt, daß die Klassen A_p^ω und H_p^ω im allgemeinen verschieden sind, und gleichzeitig eine Variante der Verallgemeinerung des Theorems A vorgeschlagen, die eine Umkehrung im Sinne von Theorem B und eine Charakterisierung der Klassen erlaubt. Bei der Formulierung und Verallgemeinerung dieses Ergebnisses verändern wir die Konstruktion aus [9] geringfügig. Sei

$$a_i = (1 - 2^{-2i})^{1/2}, \qquad a_{-i} = a_i, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

d.h. $(1 - a_i^2)^{1/2} = 2^{-|i|}$. Wir betrachten die Zerlegungen

$$\pi_k\colon \quad -1 < a_{-k} < \cdots < a_0 = 0 < \cdots < a_k < 1,$$

$k = 0, 1, \ldots$. Die Abschnitte der Zerlegungen bezeichnen wir mit $E_i^{(k)}$, $i = \pm 1, \ldots, \pm(k+1)$. Theorem A kann nun so umformuliert werden: Wenn $f \in C$, so existiert eine Folge von Polynomen $\{P_n(x)\}_{n=1}^\infty$, so daß

$$\|f - S_n\| \leqslant C\omega_1(1/n, f), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

wobei $\{S_n(x)\}$ mit Hilfe von $\{P_n(x)\}$ auf folgende Art bestimmt ist: $S_n(x)$ stellt eine stückweise-polynomiale Funktion auf der Zerlegung π_k gemäß

$$S_n(x) = P_{[n/2^{|i|-1}]}(x), \qquad x \in E_i^{(k)}, \qquad i = \pm 1, \ldots, \pm(k+1) \tag{3.4}$$

dar, wobei $k = [\log_2 n/2]$ gilt und $[\alpha]$ den ganzen Teil von α bezeichnet.

In dieser Formulierung gelang es in [9], die Theoreme A und B auf die Räume L_p zu übertragen.

THEOREM D. *Sei $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$ und $\omega(h) \in \Omega$.*

(1) *Wenn $f \in H_p^\omega$ gilt, so existiert eine Folge $\{P_n(x)\}_{n=1}^\infty$, so daß*

$$\|f - S_n\|_p \leqslant C\omega(1/n), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.5}$$

wobei $\{S_n(x)\}$ mit Hilfe von $\{P_n(x)\}$ gemäß (3.4) definiert wird und die Konstante C nicht von n und f abhängt.

(2) *Umgekehrt, wenn eine Folge von Polynomen* $\{P_n(x)\}$ *existiert, für die* (3.5) *erfüllt ist, so gilt*

$$\omega_{p,1}(h, f) = O\left(h \int_h^1 \frac{\omega(t)}{t^2} \log_2 \frac{2t}{h}\, dt\right), \qquad h \to 0. \tag{3.6}$$

Aus Theorem D folgt leicht die Charakterisierung der Klassen $H_p{}^\omega$, wenn $\omega(h)$ für $m = 1$ (2.16) genügt.

In diesem Paragraphen werden wir Theorem D für Stetigkeitsmoduln höherer Ordnung herleiten.

THEOREM 2. *Sei* $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, *sowie* $m = 0, 1, \ldots$ *eine natürliche Zahl. Dann existiert eine Folge von Polynomen* $\{P_n(x)\}_{n=m}^{\infty}$, *so daß für* $n = 1, 2, \ldots$,

$$\| f - S_n \|_p \leqslant C(m, p)\, \omega_{p,m+1}(1/(m+1)\, n, f) \tag{3.7}$$

gilt, wobei $S_n(x)$ *in* (3.4) *definiert und* $P_1(x) = \cdots = P_{m-1}(x) = P_m(x)$ *gesetzt ist.*

Beweis. Von der Idee her werden wir einige Gedanken aus [4, 9] sowie aus dem Beweis von Theorem 1 kombinieren, allerdings bringt der Übergang zu Stetigkeitsmoduln beliebiger Ordnung einige technische Schwierigkeiten mit sich, die den Beweis langwierig machen.

Wir betrachten wieder die oben eingeführten Zerlegungen π_k und teilen jeden Abschnitt $E_i^{(k)}$ in $2^{k-|i|+1}$ gleiche Teile, $i = \pm 1, \ldots, \pm(k+1)$, und erhalten neue Zerlegungen

$$\tilde{\pi}_k\colon \quad -1 = x_{-N}^{(k)} < \cdots < x_{-1}^{(k)} < x_0^{(k)} = 0 < x_1^{(k)} < \cdots < x_N^{(k)} = 1$$

mit den Abschnitten $\Delta_j^{(k)} = [x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)})$, $j = -N+1, \ldots, N$, $N = N(k)$. Wir halten hier eine Eigenschaft fest, die wir unten oft benutzen werden: Wenn $\Delta_j^{(k)} \subset E_i^{(k)}$ gilt, so haben wir

$$| \Delta_j^{(k)} | = \frac{a_{|i|} - a_{|i|-1}}{2^{k-|i|+1}} \asymp 2^{-k-|i|} \tag{3.8}$$

(wir schreiben $f \asymp g$, wenn absolute Konstanten C_1, C_2 derart existieren daß $0 < C_1 \leqslant f \cdot g^{-1} \leqslant C_2 < \infty$ gilt für beliebige Werte der Parameter, von denen f und g abhängen).

Wir führen nun die stückweise-polynomiale Funktion

$$S_k^{(1)}(x) = P_j^{(k)}(x), \qquad x \in \Delta_j^{(k)}, \qquad j = -N+1, \ldots, N, \quad N = N(k)$$

ein, wobei $P_j^{(k)}(x) \equiv P_m(x; \Delta_j^{(k)}, f)$ die (1.10) erfüllenden Polynome der Ordnung $\leqslant m$ aus Lemma 5 darstellen. Gemäß dieser Definition gilt

$$S_k^{(1)}(x) = \sum_{j=-N+1}^{N} P_j^{(k)}(x)(\Theta_{x_j^{(k)}}(x) - \Theta_{x_{j-1}^{(k)}}(x)),$$

und wenn man hier $\Theta_{x_j^{(k)}}(x)$ durch die Polynome $Q_j^{(k,l)}(x) \equiv Q_{2^{k+1}l}(x; x_j^{(k)})$ aus Lemma 3 ersetzt, bekommen wir eine Folge von Polynomen

$$R_k(x) = \sum_{j=-N+1}^{N} P_j^{(k)}(x)(Q_j^{(k,l)}(x) - Q_{j-1}^{(k,l)}(x)) \tag{3.9}$$

der Ordnung $\leqslant m + 2^{k+1}l$, $k = 0, 1, \ldots$. Die natürliche Zahl l werden wir weiter unten definieren. Wir führen noch zwei stückweise-polynomiale Funktionen ein

$$\left.\begin{aligned} S_k^{(2)}(x) &= R_{k-|i|+1}(x), \\ S_k^{(3)}(x) &= S_{k-|i|+1}(x), \end{aligned}\right\} \quad x \in E_i^{([k/2])}, \quad i = \pm 1, \ldots, \pm([k/2] + 1) \tag{3.10}$$

$k = 0, 1, \ldots$. Die in (3.10) mit Hilfe von $\{R_k(x)\}$ konstruierte Funktion entspricht schon in gewissen Sinne $S_{2^k}(x)$ aus (3.4), wir werden daher $\|f - S_k^{(2)}\|_p$ abschätzen und die notwendigen Korrekturen in $\{R_k(x)\}$ und $\{S_k^{(2)}(x)\}$ am Ende vornehmen. Zunächst betrachten wir $\|f - S_k^{(3)}\|_p$. Laut (3.10) gilt

$$S_k^{(3)}(x) = P_m(x; \Delta_j^{(k-|i|+1)}, f),$$
$$x \in \Delta_j^{(k-|i|+1)} \subset E_i^{([k/2])}, \quad i = \pm 1, \ldots, \pm([k/2] + 1).$$

Andererseits folgt aus (3.8) für $\Delta_j^{(k-|i|+1)} \subset E_i^{([k/2])}$, $i = \pm 1, \ldots, \pm([k/2] + 1)$ die Beziehung $|\Delta_j^{(k-|i|+1)}| \asymp 2^{-k}$, so daß die Anwendung von Lemma 6 die Ungleichung

$$\|f - S_k^{(3)}\|_p \leqslant C(m)\, \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f\right) \tag{3.11}$$

ergibt. Hieraus können wir sofort

$$\omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{2^k(m+1)}, S_k^{(3)}\right) \leqslant C(m)\, \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f\right) \tag{3.12}$$

ableiten. Wir wenden uns nun der Abschätzung von

$$\|S_k^{(3)} - S_k^{(2)}\|_p^p = \sum_{i=\pm 1}^{\pm([k/2]+1)} \int_{E_i^{([k/2])}} |R_{k-|i|+1}(x) - S_{k-|i|+1}^{(1)}(x)|^p\, dx \equiv \sum_i I_i \tag{3.13}$$

zu, wobei

$$I_i = \int_{E_i^{([k/2])}} \Bigg| \sum_{j=-N(k-|i|+1)+1}^{N(k-|i|+1)-1} (P_{j+1}^{(k-|i|+1)}(x) - P_j^{(k-|i|+1)}(x))$$

$$\times (\Theta_{x_j^{(k-|i|+1)}}(x) - Q_j^{(k-|i|+1,l)}(x))\Bigg|^p \, dx.$$

gilt. Wir benutzen wieder Lemma 3 und bekommen für $x \in [-1, 1]$

$$| \Theta_{x_i^{(k-|i|+1)}}(x) - Q_j^{(k-|i|+1,l)}(x)|$$

$$\leqslant \frac{C(l)}{(2^{k-|i|+1} \, | \arccos x - \arccos x_j^{(k-|i|+1)} \, | + 1)^{2l-1}}. \tag{3.14}$$

Für die Differenz $P_{j+1}^{(k-|i|+1)}(x) - P_j^{(k-|i|+1)}(x)$ und das Segment

$$\tilde{\varDelta}_j^{(k-|i|+1)} \equiv \left[x_{j-1}^{(k-|i|+1)}, x_j^{(k-|i|+1)} + \frac{|\varDelta_j^{(k-|i|+1)}|}{m+1}\right]$$

wenden wir Lemma 4 an

$$| P_{j+1}^{(k-|i|+1)}(x) - P_j^{(k-|i|+1)}(x)|$$

$$\leqslant C(m) \, \delta_j^{(k-|i|+1)}(x) \frac{\| P_{j+1}^{(k-|i|+1)} - P_j^{(k-|i|+1)} \|_{L_p(\tilde{\varDelta}_j^{(k-|i|+1)})}}{|\varDelta_j^{(k-|i|+1)}|^{1/p}}, \tag{3.15}$$

wobei $\delta_j^{(k-|i|+1)}(x) \equiv \delta_m(x; \varDelta_j^{(k-|i|+1)})$ gemäß (1.8) gesetzt wurde. Aus (3.14), (3.15) und der Jensen'schen Ungleichung folgt jetzt

$$I_i \leqslant C(m, l)^p \int_{E_i^{([k/2])}} \Bigg\{\Bigg(\sum_j \frac{\delta_j^{(k-|i|+1)}(x)}{(2^{k-|i|+1} \, | \arccos x - \arccos x_j^{(k-|i|+1)} \, | + 1)^{2l-1}}\Bigg)^{p-1}$$

$$\cdot \sum_j \frac{\delta_j^{(k-|i|+1)}(x) \, \| P_{j+1}^{(k-|i|+1)} - P_j^{(k-|i|+1)} \|_{L_p(\tilde{\varDelta}_j^{(k-|i|+1)})}^p}{|\varDelta_j^{(k-|i|+1)}| \, (2^{k-|i|+1} \, | \arccos x - \arccos x^{(k-|i|+1)} \, | + 1)^{2l-1}}\Bigg\} \, dx. \tag{3.16}$$

Es zeigt sich, daß für $l > m + 1$ die Abschätzung

$$\sup_{x \in E_i^{([k/2])}} \Bigg\{\sum_j \frac{\delta_j^{(k-|i|+1)}(x)}{(2^{k-|i|+1} \, | \arccos x - \arccos x_j^{(k-|i|+1)} \, | + 1)^{2l-1}}\Bigg\}$$

$$= C(m, l) < \infty \tag{3.17}$$

besteht. Zum Beweis dieser Behauptung können wir uns o.B.d.A. auf $i > 0$ beschränken. Es gibt nun 4 Möglichkeiten

(a) $\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{i+r}^{(k-i+1)}, \quad r = 2, \dots, k+2-2i$

(b) $\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{i+r}^{(k-i+1)}, \quad r = -1, 0, 1$

(c) $\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{i-r}^{(k-i+1)}, \quad r = 2, \dots, i, \quad (E_0^{(k-i+1)} = E_{-1}^{(k-i+1)})$

(d) $\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{-r}^{(k-i+1)}, \quad r = 2, \dots, k-i+2.$

Die Summe in (3.17) unterteilt sich dementsprechend in 4 Untersummen. Der größeren Übersichtlichkeit halber lassen wir zeitweise den Index $(k-i+1)$ weg. Unter der Voraussetzung (a) ist für $x \in E_i^{[(k/2)]}$

$$|\arccos x - \arccos x_j| \geqslant (1 - a_{i-1}^2)^{-1/2} |x - x_j| = 2^{i-1} |x - x_j|$$

und $\delta_j(x) \leqslant C(m) |x - x_j|^m |\Delta_j|^{-m}$, so daß

$$\frac{\delta_j(x)}{(2^{k-i+1} |\arccos x - \arccos x_j| + 1)^{2l-1}} \leqslant C(m) \frac{|x - x_j|^{m+1-2l}}{|\Delta_j|^m \cdot 2^{k(2l-1)}}$$

gilt. Weiter haben wir $|x - x_j| \asymp 2^{-2i}$; daher folgt aus der Konstruktion von $\tilde{\pi}_{k-i+1}$ und (3.8) die Abschätzung

$$\begin{aligned} S^{(a)} &\equiv \sum_{\Delta_j \subset \bigcup_{r=2}^{k-2i+2}} \leqslant C(m) \sum_{r=2}^{k+2-2i} \sum_{\Delta_j \subset E_{i+r}} \frac{|x - x_j|^{m-2l+1}}{|\Delta_j|^m 2^{k(2l-1)}} \\ &\leqslant C(m) \sum_r \sum_{\Delta_j \subset E_{i+r}} \frac{2^{-2i(m-2l+1)}}{2^{-(k+r)m} \cdot 2^{k(2l-1)}} \\ &\leqslant C(m) \sum_r \frac{2^{-2i(m-2l+1)}}{2^{-(k+r)m} 2^{k(2l-1)}} 2^{k-2i-r+1} \\ &\leqslant C(m) 2^{(k-2i)(m-2l+2)} \sum_{r=2}^{k-2i+2} 2^{(m-1)r} \\ &\leqslant C(m) 2^{(k-2i)(2m-2l+1)}. \end{aligned}$$

Also gilt $S^{(a)} \leqslant C(m)$ für $l > m + \frac{1}{2}$. Im Fall (b) erhalten wir durch analoge Betrachtungen

$$\begin{aligned} S^{(b)} &\equiv \sum_{\Delta_j \subset \bigcup_{r=-1}^{1} E_{i+r}} \leqslant C(m, l) \sum_{\Delta_j \subset \bigcup_{r=-1}^{1} E_{i+r}} (2^k |x - x_j| + 1)^{m-2l+1} \\ &\leqslant C(m, l) \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-2l+1} \leqslant C(m, l), \qquad l > \frac{m}{2} + 1. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung (c) und $x \in E_i^{([k/2])}$ ist

$$|\arccos x - \arccos x_j| \geqslant (1 - a_{i-r-1}^2)^{-1/2}\,|x - x_j| \geqslant C \cdot 2^{i-r}\,|x - x_j|$$

und $|x - x_j| \asymp 2^{-2(i-r)}$, womit weiter wie oben folgt

$$S^{(c)} \equiv \sum_{\Delta_j \subset \bigcup_{r=2}^{i} E_{i+r}} \leqslant C(m, l) \sum_{r=2}^{i} \sum_{\Delta_j \subset E_{i+r}} \frac{|x - x_j|^{m-2l+1}}{|\Delta_j|^m\, 2^{(k-r)(2l-1)}}$$

$$\leqslant C(m, l) \sum_{r=2}^{i} \frac{2^{-2(i-r)(m-2l+1)}}{2^{-(k-r)m}\, 2^{(k-r)(2l-1)}} \cdot 2^{k-2i+r+1}$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{(k-2i)(m-2l+2)} \sum_{r=2}^{i} 2^{r(m-2l+2)} \leqslant C(m, l), \qquad l > \frac{m}{2} + 1.$$

Im Fall (d) benutzen wir die Beziehungen $|x - x_j| \asymp 1$ und

$$2^{k-i+1}\,|\arccos x - \arccos x_j| + 1 \asymp 2^{k-i}$$

für $x \in E_i^{([k/2])}$. Das ergibt

$$S^{(d)} \equiv \sum_{\Delta_j \subset \bigcup_{r=2}^{k-i+2} E_{i+r}} \leqslant C(m) \sum_{r=2}^{k-i+2} \sum_{\Delta_j \subset E_{-r}} \frac{1}{2^{-(k-i+r)m}\, 2^{(k-i)(2l-1)}}$$

$$= C(m) \sum_{r=2}^{k-i+2} 2^{k-i-r+2} \frac{2^{(k-i+r)m}}{2^{(k-i)(2l-1)}} \leqslant C(m)\, 2^{(k-i)(m-2l+2)} \sum_{r=2}^{k-i+2} 2^{(m-1)r}$$

$$\leqslant C(m)\, 2^{(k-i)(2m-2l+1)} \leqslant C(m),$$

sobald $l > m + \frac{1}{2}$ gilt. Damit ist (3.17) gezeigt. Unter Beachtung von (3.17) bleiben in (3.16) noch die Integrale

$$I_j^{(k-i+1)} = \int_{E_i^{([k/2])}} \frac{\delta_j^{(k-i+1)}(x)\, dx}{|\Delta_j^{(k-i+1)}|\,(2^{k-i+1}\,|\arccos x - \arccos x^{(k-i+1)}| + 1)^{2l-1}}$$

abzuschätzen. Dabei unterscheiden wir wieder die Möglichkeiten (a), (b), (c), (d) und lassen den Index $(k - i + 1)$ weg. Die schon oben aufgeführten Ungleichungen für die einzelnen Fälle werden ohne nochmalige Erwähnung benutzt. Für (a) haben wir

$$I_j \leqslant C(m) \int_{E_i^{([k/2])}} \frac{|x - x_j|^{m-2l+1}}{|\Delta_j|^{m+1}\, 2^{k(2l-1)}}\, dx$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{-2i} \frac{2^{-2i(m-2l+1)}}{2^{-(k+r)(m+1)}\, 2^{k(2l-1)}} \leqslant C(m, l)\, 2^{(k-2i)(m-2l+2)}\, 2^{r(m+1)}$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{r(2m+3-2l)}, \qquad \left(k - 2i \geqslant r + 2,\ l > \frac{m}{2} + 1\right). \tag{3.18}$$

Im Fall (b) bekommt man

$$I_j \leqslant C(m, l) \int_{E_i^{([k/2])}} \frac{(2^k \mid x - x_j \mid + 1)^{m-2l+1}}{\mid \Delta_j \mid} \, dx$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^k \int_0^\infty (2^k x + 1)^{m-2l+1} \, dx \leqslant C(m, l) \tag{3.19}$$

für $l > m/2 + 1$. Auf dieselbe Art und Weise zeigt man für (c) und (d) entsprechende Ungleichungen

$$I_j \leqslant C(m, l)\, 2^{r(m-2l)}, \qquad l > m + \tfrac{1}{2} \tag{3.20}$$

$$I_j \leqslant C(m, l)\, 2^{-k(l-3/2-m)}. \tag{3.21}$$

Wie im Beweis von Theorem 1 bemerken wir nun die Gleichheit

$$\Delta^{m+1}_{|\tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)}|} S^{(1)}_{k-i+1}(x) = P_{j+1}^{(k-i+1)}(x) - P_j^{(k-i+1)}(x), \qquad x \in \tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)}.$$

Wir summieren jetzt die Ungleichungen (3.18) bei fixiertem r nach $\Delta_j \subset E_{i+r}$ und $i \geqslant 1$. Mit Hilfe von Lemma 6 ergibt sich auf analoge Weise wie beim Nachweis von (3.11) und (3.12) die Abschätzung

$$\sum_{i \geqslant 1} \sum_{\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{i+r}^{(k-i+1)}} I_j^{(k-i+1)} \| P_{j+1}^{(k-i+1)} - P_j^{(k-i+1)} \|^p_{L_p(\tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)})}$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{r(2m+3-2l)} \sum_{i \geqslant 1} \sum_{\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{i+r}^{(k-i+1)}} \| \Delta^{m+1}_{|\tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)}|} S^{(1)}_{k-i+1} \|^p_{L_p(\tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)})}$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{r(2m+3-2l)} \omega^p_{p,m+1}(2^{-(k+r)}(m+1)^{-1}, S^{(3)}_{k+r})$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{r(2m+3-2l)} \omega^p_{p,m+1}\left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f\right), \tag{3.22}$$

$r = 2, \ldots, k+1$. Für $r = 0, 1$ beweist man (3.22) unter Benutzung von (3.19). Genauso verfahren wir mit (3.19) und (3.20), um

$$\sum_{i \geqslant r} \sum_{\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{i-r}^{(k-i+1)}} I_j^{(k-i+1)} \| P_{j+1}^{(k-i+1)} - P_j^{(k-i+1)} \|^p_{L_p(\tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)})}$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{r(m-2l)} \omega^p_{p,m+1}(2^{-(k-r)}(m+1)^{-1}, f)$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{r(m-2l+(m+1)p)} \omega^p_{p,m+1}\left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f\right) \tag{3.23}$$

für $r = 1, 2, \ldots, [k/2] + 1$ zu erhalten. Dabei wurde (1.1) ausgenutzt. Die Summierung der Beziehungen (3.21) führt zur Ungleichung

$$\sum_{r=2}^{k+1} \sum_{i} \sum_{\Delta_j^{(k-i+1)} \subset E_{-r}^{(k-i+1)}} I_j^{(k-i+1)} \| P_{j+1}^{(k-i+1)} - P_j^{(k-i+1)} \|_{L_p(\tilde{\Delta}_j^{(k-i+1)})}^p$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{-k(l-m-3/2)} \sum_{r=-[k/2]+1}^{k+1} \omega_{p,m+1}^p(2^{-(k+r)}(m+1)^{-1}, f)$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{-k(l-m-3/2)} \left\{ \sum_{r=0}^{[k/2]+1} 2^{r(m+1)p} + (k+1) \right\} \omega_{p,m+1}^p \left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f \right)$$

$$\leqslant C(m, l)\, 2^{-k(l-m-3/2-(m+1)p/2)} \omega_{p,m+1}^p \left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f \right). \tag{3.24}$$

Für $i \leqslant -1$ bekommen wir analoge Abschätzungen. Wir addieren (3.22)–(3.24) und beachten (3.13), (3.16) sowie (3.17). Wenn man dabei

$$l \equiv l(m, p) = \left[m + \frac{3}{2} + \frac{m+1}{2} p \right] + 1$$

setzt, so ergibt das

$$\begin{aligned} \| S_k^{(2)} - S_k^{(3)} \|_p^p &\leqslant C(m, l)^p\, \omega_{p,m+1}^p \left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f \right) \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{k+1} 2^{(2m+3-2l)r} + \sum_{r=1}^{[k/2]+1} 2^{(m+(m+1)p-2l)r} \right. \\ &\quad \left. + 2^{(k/2)(2m+(m+1)p+3-2l)} \right\} \\ &\leqslant C(m, p)\, \omega_{p,m+1}^p \left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f \right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Die Vereinigung von (3.11) und (3.25) impliziert das gewünschte Zwischenresultat:

$$\| f - S_k^{(2)} \|_p \leqslant C(m, p)\, \omega_{p,m+1} \left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f \right). \tag{3.26}$$

Wir haben also Polynome $R_k(x)$ von der Ordnung $\leqslant m + 2^{k+1} l(m, p)$, $k = 0, 1, \ldots$, derart angegeben, daß die in (3.10) definierten stückweise-polynomialen Funktionen $S_k^{(2)}(x)$ der Ungleichung (3.26) genügen.

Wir kommen nun zum unmittelbaren Beweis von (3.7). Wir bemerken, daß für genügend große k, $k \geqslant k(m)$ die Beziehung

$$S_k \equiv \left[\frac{2^k - m}{2l(m, p)} \right] \asymp \frac{1}{2l(m, p)}\, 2^k \tag{3.27}$$

gilt. Wir bestimmen nun gemäß Lemma 3 Polynome $\tilde{Q}_j^{(k)}(x) \equiv Q_{2s_k l(m,p)}(x, x_j^{(k)})$ und mit deren Hilfe Polynome $\tilde{R}_k(x)$ von der Ordnung $\leqslant m + 2l(m,p)\, s_k \leqslant 2^k$ (siehe (3.9), wo statt $Q_j^{(k,l)}(x)$ jetzt $Q_j^{(k)}(x)$ gesetzt wird). Es ist leicht einzusehen, daß auf der Grundlage von (3.27) für genügend große k, $k \geqslant k(m)$, die weiteren Abschätzungen mit neuen, von m und p abhängigen Konstanten in Kraft bleiben, wenn in (3.10) $R_k(x)$ durch $\tilde{R}_k(x)$ ersetzt wird. Sei

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_m(x; [-1, 1], f), & & n < 2^{k(m)} \\ &= \tilde{R}_k(x), \qquad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, & & k \geqslant k(m). \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Folge von Polynomen. Tatsächlich ist laut Konstruktion $P_n(x)$, $n \geqslant m$ ein Polynom der Ordnung $\leqslant n$. Für große n, $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, $k \geqslant 2k(m)$, fallen die in (3.4) definierten Funktionen $S_n(x)$ mit $\tilde{S}_k^{(2)}(x)$ zusammen, so daß

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_p &\leqslant C(m,p)\, \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{2^k(m+1)}, f\right) \\ &\leqslant C(m,p)\, \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{n(m+1)}, f\right) \end{aligned}$$

gilt. Für kleine n, $n < 2^{2k(m)}$, besagen unsere oben angestellten Betrachtungen, daß

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_p &\leqslant C(m,p)\left\{\|f - P_m(x; [-1,1], f)\|_p + \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{n(m+1)}, f\right)\right\} \\ &\leqslant C(m,p)\, \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{m+1}, f\right) \\ &\leqslant C(m,p)\, \omega_{p,m+1}\left(\frac{1}{n(m+1)}, f\right) \end{aligned}$$

gilt. Damit ist der Beweis von Theorem 2 abgeschlossen.

Wir verschärfen und verallgemeinern jetzt den zweiten Teil von Theorem D.

THEOREM 3. *Sei $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 0, 1, \ldots$. Wenn eine Folge von Polynomen $\{P_n(x)\}_{n=m}^{\infty}$ existiert, für die*

$$\|f - S_n\|_p = O(w(1/n)), \qquad n \to \infty, \tag{3.28}$$

mit $w(h) \in W_{m+1}$ gilt, wobei $S_n(x)$ wie in Theorem 2 definiert wird, so folgt

$$\omega_{p,m+1}(h, f) = O\left(h^{m+1} \int_h^1 \frac{w(t)}{t^{m+2}}\, dt\right), \qquad h \to 0. \tag{3.29}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst ein etwas schwächeres Resultat, das eine genaue Verallgemeinerung von (3.6) darstellt

$$\omega_{p,m+1}(h, f) = O\left(h^{m+1} \int_h^1 \frac{w(t)}{t^{m+2}} \log_2 \frac{2t}{h}\, dt\right), \qquad h \to 0. \tag{3.30}$$

Wir benutzen dabei die in [9] angestellten Betrachtungen. Sei

$$Q_{2^i}(x) = S_{2^i}(x) - S_{2^{i-1}}(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, \quad Q_1(x) = P_1(x).$$

Aus (3.28) folgt sofort die Beziehung

$$\| Q_{2^i}(x) \|_p = O(w(2^{-i})), \qquad i \to \infty. \tag{3.31}$$

Für genügend kleine h bestimmen wir k, $k = 0, 1, \ldots$, gemäß

$$\frac{1}{2^{k+1}(m+1)} < h < \frac{1}{2^k(m+1)}.$$

Aus dem Segement $[-1, 1-(m+1)h]$ werden die Abschnitte $[a_i - (m+1)h, a_i)$, $i = -[k/2], \ldots, [k/2]$, entfernt und die Restmenge mit E_h bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_{E_h} | \Delta_h^{m+1} f(x) |^p \, dx \right\}^{1/p} \\
&\quad \leqslant \left\{ \int_{E_h} \left| \sum_{i=0}^{k} \Delta_h^{m+1} Q_{2^i}(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} \\
&\qquad + \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m+1}{\nu} \left\{ \int_{E_h} \left| f(x+\nu h) - \sum_{i=0}^{k} Q_{2^i}(x+\nu h) \right|^p dx \right\}^{1/p} \\
&\quad \leqslant \left\{ \int_{E_h} \left| \sum_{i=0}^{k} \int_0^h \cdots \int_0^{h_m} Q_{2^i}^{(m+1)}(x + h_{m+1}) \, dh_{m+1} \cdots dh_1 \right|^p dx \right\}^{1/p} \\
&\qquad + 2^{m+1} \| f - S_{2^k} \|_p \\
&\quad \leqslant \sum_{i=0}^{k} \int_0^h \cdots \int_0^{h_m} \left\{ \int_{E_h} | Q_{2^i}^{(m+1)}(x + h_{m+1}) |^p \, dx \right\}^{1/p} dh_{m+1} \cdots dh_1 \\
&\qquad + O(w(2^{-k})) \\
&\quad \leqslant h^{m+1} \sum_{i=0}^{k} \| Q_{2^i}^{(m+1)} \|_{L_p(-1,1)} + O(w(h)).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Unter Benutzung der Konstruktion der Funktionen $Q_{2^i}(x)$ auf $E_j^{(k)}$ und der Ungleichung von Lebed' wurde in [9, S. 897], für $m = 0$ die Abschätzung

$$\| Q_{2^i} \|_p^p = O\left(\sum_{j=[i/2]}^{i} 2^{jp} \| Q_{2^j} \|_p^p \right)$$

hergeleitet, mehrfache Benutzung dieser Beziehung gibt uns

$$\| Q_{2^i}^{(m+1)} \|_p^p = O\left(\sum_{i_1=[i/2]}^{i} \cdots \sum_{i_{m+1}=[i_m/2]}^{i_m} 2^{(i_1+\cdots+i_{m+1})p} \| Q_{2^{i_{m+1}}} \|_p^p \right).$$

Wenn man diesen Ausdruck hier in die $1/p$-te Potenz erhebt, nach i summiert und (3.31) beachtet, ergibt sich

$$\begin{aligned} h^{m+1} \sum_{i=0}^{k} \| Q_{2^i}^{(m+1)} \|_p &= O\left(h^{m+1} \sum_{i=0}^{k} \sum_{i_1=0}^{i} \cdots \sum_{i_{m+1}=0}^{i_m} 2^{(i_1+\cdots+i_{m+1})} \| Q_{2^{i_{m+1}}} \|_p \right) \\ &= O\left(h^{m+1} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} 2^{(m+1)} \| Q_{2^j} \|_p \right) \\ &= O\left(h^{m+1} \sum_{j=0}^{k} (k-j+1)\, 2^{(m+1)j} \| Q_{2^j} \|_p \right) \\ &= O\left(h^{m+1} \sum_{i=0}^{k} (k-j+1)\, 2^{(m+1)j} w(2^{-j}) \right) \\ &= O\left(h^{m+1} \int_{2^{-k}}^{1} \frac{w(t)}{t^{m+2}} \log_2 \frac{2t}{2^{-k}}\, dt \right). \end{aligned}$$

Das impliziert zusammen mit (3.32)

$$\left\{ \int_{E_h} | \Delta_h^{m+1} f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = O\left(h^{m+1} \int_h^1 \frac{w(t)}{t^{m+2}} \log_2 \frac{2t}{h}\, dt \right), \qquad h \to 0. \quad (3.33)$$

Die Betrachtung der Menge E_h war deshalb nötig, weil auf den Abschnitten $[a_i - (m+1)\, h, a_i)$, $i = -[k/2],\ldots, [k/2]$, die Differenz $\Delta_h^{m+1} Q_{2^k}(x)$ nicht als Integral der $(m+1)$-ten Ableitung von $Q_{2^k}(x)$ darstellbar ist. Um für die Menge $[-1, 1-(m+1)\, h] \backslash E_h$ ebenfalls eine Abschätzung zu erhalten, betrachten wir wie in [9] die Zerlegungen $-1 < b_{-[k/2]+1} < \cdots < b_{[k/2]} < 1$, wobei $b_i = (a_i + a_{i-1})/2$ gilt, $k = 2, 3,\ldots$. Die stückweise-polynomialen Funktionen $\sigma_{2^k}(x)$ werden wie folgt definiert: Auf $[-1, b_{-[k/2]+1})$ $([b_{[k/2]}, 1])$ fällt $\sigma_{2^k}(x)$ mit der Fortsetzung des Polynoms zusammen, das $S_{2^k}(x)$ auf $[-1, a_{-[k/2]})$ $([a_{[k/2]}, 1])$ darstellt, und auf $[b_{i-1}, b_i)$ mit dem entsprechendem Polynom auf $[a_{i-1}, a_i)$, $i = -[k/2]+2,\ldots, [k/2]$. Man überzeugt sich leicht, daß für $\{\sigma_{2^k}(x)\}$ (3.28) gilt, was in analoger Weise eine Abschätzung für $\{\int_{E_h'} | \Delta_h^{m+1} f(x)|^p\, dx\}^{1/p}$ wie in (3.33) ergibt. Hier ist E_h' die durch Entfernen der Anschnitte $[b_i - (m+1)\, h, b_i)$ aus $[-1, 1-(m+1)\, h]$ entstandene Menge. Laut Konstruktion gilt $E_h \cup E_h' = [-1, 1-(m+1)\, h]$, so daß (3.30) bewiesen ist.

Da $w(h) \in W_{m+1}$ gilt, können wir Lemma 1 anwenden, was

$$h^{m+2} \int_h^1 \frac{w(t)}{t^{m+3}} \log_2 \frac{2t}{h}\, dt = O(w(h)), \qquad h \to 0,$$

ergibt. Die schon bewiesene Beziehung (3.30) gestattet daher, unter Benutzung von $W_{m+1} \subset W_{m+2}$ auf die Richtigkeit von

$$\omega_{p,m+2}(h, f) = O(w(h)), \qquad h \to 0,$$

zu schließen. Es genügt nun, (1.2) anzuwenden.

Aus den in diesem Paragraph bewiesenen Ergebnissen folgt unmittelbar die folgende Beschreibung der Klassen $H^w_{p,m}$.

THEOREM 4. *Sei* $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$. *Wenn* $w(h) \in W_m$ *der Beziehung* (2.16) *genügt, so sind äquivalent*

(1) $f \in H^w_{p,m}$,

(2) *Es existiert eine Folge von Polynomen* $P_n(x)$ *der Ordnung* $\leqslant n$, $n \geqslant m - 1$, $P_1(x) = \cdots = P_{m-2}(x) = P_{m-1}(x)$, *derart, daß die in* (3.4) *definierten stückweise-polynomialen Funktionen der Beziehung* (3.28) *genügen.*

Dieser Satz ähnelt seiner Form nach entsprechenden Ergebnissen für die trigonometrische beste Approximation im periodischen Fall. Wir bemerken noch, daß auf Grund von Lemma 1 die durch die Eigenschaft (2) aus Theorem 4 gegebene Funktionenklasse für jedes $w(h) \in W_m$ mit $H^w_{p,m+1}$ zusammenfällt, so daß die auf diese Art und Weise konstruktiv beschriebenen Klassen stets mit Hilfe der Differenzeneigenschaften gewisser Ordnung charakterisiert werden können.

Zum Abschluß möchte der Autor Frau Dr. Storoženko für die Aufgabenstellung und eine Reihe wertvoller Hinweise sowie Professor Uljanov für seine dieser Arbeit gewidmete Aufmerksamkeit aufrichtig danken.

REFERENCES

1. O. V. BESOV, Fortsetzung von Funktionen unter Erhaltung der Differential- und Differenzeneigenschaften in L_p, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **150** (1963), 963–966 (Russ.).
2. JU. A. BRUDNYĬ, Verallgemeinerung eines Theorems von A. F. Timan, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **148** (1963), 1237–1240 (Russ.).
3. JU. A. BRUDNYĬ, Über ein Theorem der lokalen besten Approximation, *Kazan. Gos. Univ. Učen. Zap.* **124** (1964), 43–49 (Russ.).
4. JU. A. BRUDNYĬ, Approximation von Funktionen mit algebraischen Polynomen, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **32** (1968), 780–787 (Russ.).
5. Z. CIESIELSKI, Constructive function theory and spline systems, *Studia Math.* **53** (1975), 277–302.

6. V. K. Dzjadyk, Über die konstruktive Charakteristik von Funktionen, die der Bedingung Lip α $(0 < \alpha < 1)$ auf dem endlichen Abschnitt der reellen Achse genügen, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **20** (1956), 623–642 (Russ.).
7. H. Johnen, Inequalities connected with the moduli of smoothness, *Mat. Vesnik* **9** (1972), 289–302.
8. G. K. Lebed', Ungleichungen für Polynome und deren Ableitungen, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **117** (1957), 570–572 (Russ.).
9. V. P. Motornyĭ, Approximation von Funktionen mit algebraischen Polynomen in der Metrik von L_p, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971), 874–899 (Russ.).
10. S. M. Nikolskiĭ, Über die beste Approximation mit Polynomen von Funktionen, die der Lipschitzbedingung genügen, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **10** (1946), 295–322 (Russ.).
11. M. K. Potapov, Einige Fragen der besten Approximation in der Metrik von L_p, Kand. Dissertation, Moskau, 1956 (Russ.).
12. M. K. Potapov, Über die Approximation mit algebraischen Polynomen in der Metrik von L_p, Issledovanija po sovr. probl. konstr. teorii funkcii, Moskau, 1961, pp. 64–69 (Russ.).
13. K. Scherer, A comparison approach to direct theorems for polynomial spline approximation, *in* "Approximation Theory," Proc. Conf. Poznań 1972, Warszawa-Dordrecht-Boston, 1975.
14. E. A. Storoženko, Über die Approximation von Funktionen aus dem Raum L^p. $(0 < p < 1)$ mit algebraischen Polynomen (Russ), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat* **41** (1977), 652–662.
15. E. A. Storoženko and P. Oswald, Ein Jackson-Theorem in den Räumen $L^p(R^k)$, $0 < p < 1$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **229** (1976), 554–557 (Russ.).
16. A. F. Timan, Eine Verschärfung des Theorems von Jackson über die beste Approximation von Funktionen mit Polynomen auf dem endlichen Abschnitt der reellen Achse, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **78** (1951), 17–20 (Russ.).
17. A. F. Timan, Inverse Theoreme der konstruktiven Theorie von Funktionen, die auf dem endlichen Abschnitt der reellen Achse gegeben sind, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **116** (1957), 762–765 (Russ.).
18. A. F. Timan, "Approximationstheorie von Funktionen reeller Veränderlicher," Moskau, 1960 (Russ.).
19. H. Wjitney, On bounded functions with bounded n-th differences, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 480–481.